ಒರಿಗಾಮಿ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರ

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ:ಶಿವ್ ಗೌರ್, ಸ್ವಾತಿ ಸರ್ಕಾರ್
ಮತ್ತು ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್
(ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ನಾವು (ನವೆಂಬರ್ 2013ರ At Right Angles ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ) ಪ್ರಕಟವಾದ “ಒರಿಗಾಮಿ” ಲೇಖನಕ್ಕೆ ವಿವರಣೆಯೊಂದನ್ನು ನೀಡಲು ಮುಂದಾಗುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಈ ಮೂರು ಅವಲೋಕನಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು: a) X-ಮಡಿಕೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಚೌಕದ ಮಧ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. b) X-ಮಡಿಕೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಚೌಕದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಿಡಿದು ಕೊಂಚ ದೂರ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತವೆ. c) ಮಡಿಕೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂಚಿನ ಮೇಲಿನ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ ಹಾಗೂ ಚೌಕದ ಪಾದದ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳೊಡನೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಇವು ಮೂರರಲ್ಲಿ a) ಮತ್ತು c) ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾದರೆ, b) ಕೊಂಚಮಟ್ಟಿನ ಸವಾಲೊಡ್ಡುತ್ತದೆ.

Figure 1 (ಚಿತ್ರ 1)

ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಹಾಳೆ. ಹಾಳೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಅಂಚಿನ ಬಿಂದು E ಅನ್ನು B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮಡಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೆಂಪು ರೇಖೆಗಳಾಗಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾಖಂಡ EB ಮತ್ತು EC ಗಳು ಮೂಲಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೂ ನಾವು ಅವನ್ನು ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಬಿಂದುರೇಖೆಗಳಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದು ತ್ರಿಭುಜ EBC ಯ ರಚನೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ X-ಮಡಿಕೆಗಳು ತ್ರಿಭುಜ EBC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ EB ಮತ್ತು EC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಾದ BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು (a) ಮತ್ತು (c) ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುತ್ತದೆ: X-ಮಡಿಕೆಗಳು ಚೌಕದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸಿ, ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ E, B, C ಗಳು ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಈ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಭುಜ EBC ಯ ಪರಿಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ (Circum-centre).

(b) ಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು, ನಾವು ಚೌಕದ ನಾಲ್ಕೂ ಮೂಲೆಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತೇವೆ: B = (0, 0), C = (1, 0), D = (0, 1), E = (t, 1). ಇಲ್ಲಿ, $0 \le t \le 1$. EB ರೇಖೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯು (slope) $1/t$ ಆಗಿದ್ದು, EB ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಭಾರ್ಧಕದ ಬಾಗುವಿಕೆ $-t$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. EB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು $(t/2, ½)$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, EB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ (ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ m_{EB}) ಸಮೀಕರಣವು:

$$y - ½ = -t(x - t/2).$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

BC ರೇಖೆಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ (ಚಿತ್ರ 1 ರ m_{BC}) ಸಮೀಕರಣವು x = ½ ಆಗಿದೆ. m_{EB} ಮತ್ತು m_{BC} ರೇಖೆಗಳು O = (u, v) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ; ಸಹಜವಾಗಿಯೇ, ಇದು ತ್ರಿಭುಜ EBC ಯ ಪರಿಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ. u = ½ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$v = ½ - t(½– t/2) = ½ - t(1-t)/2$$
ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ $0 \le t \le 1$ ಆಗಿರಲಿ. $t(1 – t)$; $0 \le t \le 1$, ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ¼ (t = ½ ಆಗಿದ್ದಾಗ) ಹಾಗೂ 0 (t = 0 ಮತ್ತು t = 1 ಆಗಿದ್ದಾಗ) ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ¼ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯಲು

$$t(1 – t) = t – t^2 = ¼ - (t – ½)^2 \le ¼$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, t = ½ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳು ಸಮವಾಗುತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, v ನ ಬೆಲೆ ½ - ½.¼ ಮತ್ತು ½ ದ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ, $3/8 \le v \le ½$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (½, 3/8) ಮತ್ತು (½, ½) ಆಗಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪುಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡವೇ O ನ ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಮೇಲಿನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಹೇಳಿಕೆ t(1 – t) ಎಂಬುದು t = ½ ಬೆಲೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕಾಣುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, t ಯನ್ನು 1 – t ಇಂದ ಬದಲಿಸಿದರೆ, ಹೇಳಿಕೆ t(1 –t) ಬದಲಾಗದೆ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ (ಅದರ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳು ಜಾಗ ಬದಲಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ, ಅಷ್ಟೇ). ಚೌಕದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (m_{BC} ರೇಖಾಖಂಡ) ಈ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಂರಚನೆಯ ದರ್ಪಣ ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ಪಡೆದರೆ ದೊರೆಯುವ ತ್ರಿಭುಜವು EBC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಪರಿಕೇಂದ್ರವು ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ BC ರೇಖೆಯಿಂದ ಅಷ್ಟೇ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಮೇಲಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮಮಿತಿ ಹೇಳಿಕೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅವತಾರವಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳು: ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅರಿಯುವುದು ಆಸಕ್ತಿ ಹುಟ್ಟಿಸುತ್ತದೆ. ಅವೆಂದರೆ, ತ್ರಿಭುಜ EBC ಯ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (In-centre) ಹಾಗೂ ಲಂಬಕೇಂದ್ರಗಳು (Ortho-centre) ಚಲಿಸುವ ಪಥಗಳು. ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. E = (t, 1) ಆದಾಗ, ತ್ರಿಭುಜದ E ಮತ್ತು C ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$x = t, y = -t(x – 1)$$

ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದರೆ, $H = (t, t – t^2)$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಪರಿವೃತ್ತಖಂಡದ (Parabolic Arc) ಮೇಲೆ H ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, ಚೌಕದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅದರ ಅತ್ಯುನ್ನತ ಬಿಂದುವಿನ ಎತ್ತರ (BC ರೇಖೆಯಿಂದ) ¼ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂತಃಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥವು ಅಷ್ಟಾಗಿ ಪರಿಚಯವಿರದ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು “ಸದಿಶ ಸೂತ್ರ”ವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. E = (t, 1) ಆದಾಗ, ಅಂತಃಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು (x(t), y(t)) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$x(t) = \frac{t + \sqrt{1 + t^2}}{1 + \sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 + (1 - t)^2}},$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 + (1 - t)^2}}.$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

Figure 2 (ಚಿತ್ರ 2, ಮೂರು ಬಿಂದುಪಥಗಳು)

ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಮೂರೂ ಬಿಂದುಪಥಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ "ಜಿಯೋ ಜೀಬ್ರಾ ಸ್ಕ್ರೀನ್ ಶಾಟ್" ಅನ್ನು ನೋಡಬಹುದಾಗಿದೆ

ಸೂಚಿತ ವಿಸ್ತರಣೆ: ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೂಡ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು E ಬಿಂದುವು ಈ ಹಾಳೆಯ ಸಣ್ಣ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವಂತೆಯೂ, ಬಳಿಕ ಅದು ಉದ್ದನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವಂತೆಯೂ ಮಾಡಿ ನೋಡಿ. ಇದನ್ನೇ ಸಪೂರ ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆ ಬಳಸಿ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, A4 ಹಾಳೆಯನ್ನು ಉದ್ದುದ್ದವಾಗಿ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಂಡು) ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವಂತಹ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸಂರಚನೆ ದೊರೆಯುವುದೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

O ಬಿಂದುವು ಹಾಳೆಯ ಆಚೆ ಇರಲು ಆಯತದ ಉದ್ದ-ಅಗಲಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು ಆಸಕ್ತಿ ಕೆರಳಿಸುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿದೆ. (ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಮಡಿಕೆಗಳು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲ!) ಮೇಲೆ ನೀಡಲಾದ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳು a, b ಆಗಿರುವ ಆಯತಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬದಲಿಸಿ; a = b = 1, ಆದಾಗ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮರಳಿ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿ.

==============

ಇತಿಹಾಸದ ತುಣುಕುಗಳು: ಲಘುಗಣಕದ (Logarithm) ಹುಟ್ಟು

(ಇದನ್ನು "ಫ್ಯುಟಿಲಿಟಿ ಕ್ಲೋಸೆಟ್" ಅಂತರ್ಜಾಲ ಬ್ಲಾಗಿನಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ)

(http://www.futilitycloset.com/about/) and its page
http://www.futilitycloset.com/2014/09/11/likewise/?utm_source=rss&utm_medium=rss&utm_campaign=likewise.

ಗಣಿತ ಇತಿಹಾಸದ ಪುಟಗಳಿಂದ ಮೂಡುವ ರಮಣೀಯ ದೃಶ್ಯವೊಂದು ಇಂತಿದೆ: 1615ರಲ್ಲಿ ಗ್ರೆಷಮ್ ಕಾಲೇಜಿನ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದ ಹೆನ್ರಿ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಅವರು ಲಂಡನ್ ನಗರದಿಂದ ಮುನ್ನೂರು ಮೈಲುಗಳ ಸುದೂರದ ಎಡಿನ್ ಬರೋ ಪಟ್ಟಣದಿಂದ ಲಘುಗಣಕದ ಆವಿಷ್ಕರ್ತ ಜಾನ್ ನೇಪಿಯರ್ ಅವರನ್ನು ಭೇಟಿಯಾಗಲು ಕುದುರೆ ಏರಿ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಸಮಕಾಲೀನರೊಬ್ಬರು ಇವರಿರ್ವರ ಭೇಟಿಗೆ ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿ, ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬಣ್ಣಿಸಿದ್ದಾರೆ:.

ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಅವರು ಪ್ರಭುವಿನ ಕೊಠಡಿಗೆ ದಯಮಾಡಿಸಿ, ಅಲ್ಲಿ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಸುಮಾರು ಕಾಲುಗಂಟೆ ಸಮಯ ಕಳೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಭೇಟಿಯ ಬಹುಪಾಲು ಯಾವುದೇ ಮಾತಿಲ್ಲದೆ ಒಬ್ಬರನ್ನೊಬ್ಬರು ಮೆಚ್ಚುಗೆಯ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ಈಕ್ಷಿಸುವುದರಲ್ಲೇ ಕಳೆಯುತ್ತದೆ. ಬಳಿಕ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಅವರು, "ಪ್ರಭು, ನಿಮ್ಮನ್ನು ಕಾಣುವ ಉದ್ದೇಶವಿಟ್ಟುಕೊಂಡೇ ನಾನು ಈ ಸುದೀರ್ಘ ಪಯಣವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿದ್ದೇನೆ. ಯಾವ ಚಮತ್ಕಾರದ ಅಥವಾ ಚಾತುರ್ಯದ ಸಾಧನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಖಗೋಲಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿ ಒದಗಿಬರುವ ಈ ಲಘುಗಣಕದ ಬಗ್ಗೆ ಮೊದಲು ನೀವು ಯೋಚಿಸಿದಿರಿ ಎಂದು

ಅರಿಯಲು ಬಂದಿರುವೆ. ಆದರೆ, ಪ್ರಭು, ನಿಮ್ಮಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟ ಇದನ್ನು ಬೇರಾರೂ ಏತಕ್ಕಾಗಿ ಇದುವರೆಗೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿಲ್ಲವೆಂಬ ಅಚ್ಚರಿಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುವ ನನಗೆ ಅರ್ಥವಾದ ಬಳಿಕ ಇದು ಅದೆಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರುತ್ತಿದೆ!

ಅವರ ಗೆಳೆತನವು ಅದೆಷ್ಟು ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಹೊಸೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿತೋ, ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಪಕಾಲಿಕವಾಗಿತ್ತು ಕೂಡ. 1614ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಲಘುಗಣಕದ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಪ್ರಕಟವಾದರೆ, ನೇಪಿಯರ್ 1617ರಲ್ಲಿ ಕೆಲಸದ ಒತ್ತಡದಿಂದ ತೀರಿಕೊಂಡರು. ಅವರ ಕೊನೆಯ ಲೇಖನಗಳಲ್ಲಿ, “ನನ್ನ ದೈಹಿಕ ದುರ್ಬಲತೆಯಿಂದ ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಕೌಶಲವಿರುವವರಿಗಾಗಿ ಈ ಹೊಸ ಕಟ್ಟಳೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಕಾರ್ಯಭಾರವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಲಂಡನ್ನಿನ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರೂ, ಬಹುಶ್ರುತ ಪಂಡಿತರೂ, ನನ್ನ ಪ್ರೀತಿಪಾತ್ರ ಸ್ನೇಹಿತರೂ ಆದ ಹೆನ್ರಿ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಅವರಿಗೆ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಸುತ್ತಿದ್ದೇನೆ.”

ಲಘುಗಣಕದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಅದರ ಪ್ರಾಚೀನ ಇತಿಹಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವವರು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಜಾಲತಾಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು:

- http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-introduction
- Shailesh Shirali, A Primer on Logarithms (Universities Press)
- http://www.westcler.org/gh/outtda/pdf_files/History_of_Logarithms.pdf